Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
17.-19.10.2011

RECHNEN MIT VEKTOREN

Die Aufgaben auf diesem Blatt sind einfache Rechnungen mit Vektoren. Sie sollen helfen, sich mit dem Konzept von Vektoren vertraut zu machen.

[P1] *Polarisationsformel*
Verwenden Sie die binomischen Formeln, um das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ allein durch Längenquadrate geeigneter Vektoren auszudrücken.

[P2] *Geraden und Flächen*
Geben Sie für die folgenden Sachverhalte Gleichungen an:

(a) Wie ist der Ortsvektor eines Massepunktes gegeben, der sich linear mit der Zeit bewegt?

(b) Welche Gleichung definiert die Punkte einer Fläche?

[P3] *Nicht orthogonale Basis*
Betrachten Sie den $\mathbb{R}^3$ mit der Basis

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Metrik $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ für diese Basis. Überzeugen Sie sich, dass die Metrik nicht degeneriert ist, dass also die Vektoren $\vec{e}_i$ in der Tat linear unabhängig sind.

(b) Welche Winkel schließen die Basisvektoren miteinander ein?

(c) Finden Sie die zugehörige kanonische Basis des Dualraums, also die linearen Abbildungen f^i mit $f^i(\vec{e}_j) = \delta^i{}_j$.

(d) Betrachten Sie den Vektor $\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$. Zu diesem Vektor gibt es ein zugehöriges Element des Dualraums, nämlich die lineare Abbildung $u : \vec{w} \mapsto u(\vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{w}$. Geben Sie die Komponenten u_j dieser linearen Abbildung bezüglich der Dualbasis f^j an, indem Sie verwenden, dass einerseits $u(\vec{e_j}) = u_i f^i(\vec{e}_j) = u_i \delta^i{}_j = u_j$ ist, andererseits aber $u(\vec{e_j}) = \vec{u} \cdot \vec{e}_j$ gilt. *Hinweis*: Am einfachsten geht das, wenn Sie $\vec{u}$ in der Standardbasis angeben.

(e) Was ist der Öffnungswinkel des Kreiskegels, der die kartesischen Koordinatenachsen enthält?

[P4] *Dreiecksungleichung*
Betrachten Sie einen Vektorraum mit Orthonormalbasis $\vec{e}_i$, so dass also $g_{ij} = \delta_{ij}$ ist. In der Vorlesung wurde der Winkel α zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ über das Skalarprodukt definiert, nämlich $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{\vec{a}^2}\sqrt{\vec{b}^2} \cos \alpha$.

(a) Machen Sie sich klar, dass dies eine sinnvolle Definition ist (dass also $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ ist), wenn die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

erfüllt ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für $|\vec{b}| = 0$ offensichtlich erfüllt ist.

(c) Für $|\vec{b}| \neq 0$ setzen Sie $\lambda = -\vec{a} \cdot \vec{b}/|\vec{b}|^2$ und betrachten Sie den Ausdruck $|\vec{a} + \lambda\vec{b}|^2 |\vec{b}|^2$. Können Sie damit die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigen?

(d) Zeigen Sie mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung die Dreiecksungleichung

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 \leq (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2 .$$

Was bedeutet sie anschaulich?